Chirothrips saltensis n. sp.

Hembra: Longitud 1,29 mm. Color castaño oscuro.

Cabeza más larga que ancha. Las mejillas divergen, convergiendo al llegar al margen posterior. Entre los ojos y en la parte superior se hallan dos pares de cerdas que se dirigen hacia atrás. Ojos de color castaño, grandes comparados con el tamaño de la cabeza, no prominentes. Ocelos bien visibles, los posteriores se hallan próximos a los ángulos internos de sus respectivos ojos. Cono bucal redondeado, llega a un tercio del protórax. Antenas como las del género, con el primer segmento una vez y media más ancho que largo, de contorno redondeado y con una línea transversal en la cara dorsal, de color castaño oscuro semejante a la cabeza; 2° delgado con una prominencia aguda en la porción apical del borde externo, casi tan larga como el ancho del segmento, llevando en el ápice una espina, de color amarillo pardusco, sombreado en su porción basal; 3° con un pedicelo notable, de color castaño claro sombreado en su porción apical, con un cono sensorio simple en la parte superior del borde externo; 4°, más ancho que largo, ensanchado en el borde externo donde presenta un cono sensorio simple; 5°, más largo que ancho; 6° más largo que todos y 7° y 8° casi del mismo largo. 4°, 5°, 6°, 7° y 8° castaño oscuros no tanto como el primero. Medidas de longitud: 1° 0,032; 2° 0,035; 3° 0,025; 4° 0,028; 5° 0,024; 6° 0,035; 7° 0,014 y 8° 0,013.

El protórax presenta la forma de un cono truncado con el margen anterior más ancho que el margen posterior de la cabeza. El margen posterior convexo con dos espinas fuertes en cada ángulo y seis espinas pequeñas en el centro. En la porción dorsal se observa una reticulación transversal débil e irregular, con pequeñas espinitas esparcidas.

Patas anteriores, como las del género, fémures engrosados de color del protórax, presentan en la zona apical esculturas que se van perdiendo a medida que se acercan a la base.

Tibias y tarsos más bien castaño amarillento. Patas medias y posteriores castaño oscuro con los ápices tibiales y tarsos más claros, casi amarillos.

Alas anteriores de color castaño claro, con dos nervaduras longitudinales que llevan: la anterior 8 espinas dispuestas en 3 grupos, la posterior 4 espinas equidistantes, costa anterior 12 ó 13 espinas y costa posterior un fleco.

El abdomen de color castaño claro, más obscuro en los últimos segmentos. Reticulaciones apenas marcadas. En el 10° segmento se observa una cisura longitudinal.

Planta hospedadora: Tabaco.

Procedencia: Salta, República Argentina.

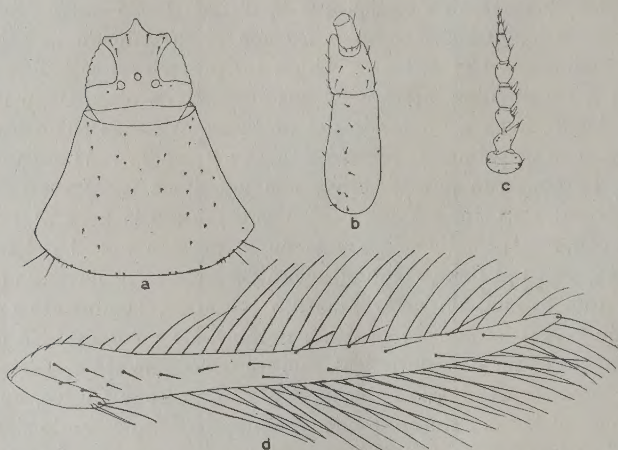


FIG. 2. — *Chirothrips saltensis* ♀; *a*, cabeza y protórax; *b*, fémur. tibia y tarso de la pata anterior; *c*, antena; *d*, ala anterior.

Observaciones. — Esta especie es muy semejante al *Chirothrips manicatus* Haliday, sólo que éste presenta el 2° segmento antenal no notablemente proyectado en su borde externo y es de color castaño claro. La primera especie citada para la Argentina fué el *Chirothrips frontalis* Williams, que es muy fácil de reconocer por presentar la cabeza prolongada más allá de los ojos, como una prominencia que lleva en su porción anterior las antenas.

BIBLIOGRAFÍA

1. WILLIAMS, C. B. 1914. — « A new of *Chirothrips* (*Thysanoptera*) from South America ». *Entomologist* XLVII, 51-53.
2. MOULTON, D. 1933. — « The Thysanoptera of South America ». *Rev. de Entomología*, Brasil, II: 451-484; III: 96-133; 227-262- 385-419 y 447-458.
3. PRIESNER, H. 1949. — « Genera Thysanopterorum ». *Bull. Soc. Fouad 1° Entom.* XXXIII, pp: 31-157.
4. PRIESNER, H. 1949. — « Studies on the genus *Chirothrips* Hal. ». *Bull. Soc. Fouad 1° Entom.* XXXIII, pp: 159-174.

SOBRE LA APLICACION Y CONSECUENCIAS DEL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

POR

PEDRO LONGHINI

Conversaciones mantenidas sobre el tema del epígrafe con el Prof. Ing. Eduardo Arenas, dilecto amigo, son las causantes de estas líneas, que, posiblemente, su único valor sea mostrar que estos principios de la mecánica perennemente incitan a la meditación y que de ellos siempre pueden esperarse nuevas consecuencias.

1. — En una publicación hecha en el nº 579 de « Ciencia y Técnica », intitulada « *Sobre la enunciación y alcance del principio de los trabajos virtuales* », hicimos notar la discrepancia que se advierte al tratar este tema, entre autores de reconocida versación científica y técnica, y pretendimos, después de ensayar un enunciado y discutir el alcance del principio, presentar como consecuencia un *nuevo teorema* y, además, establecer que el principio de trabajo mínimo de deformaciones podría ser deducido del principio de los trabajos virtuales; ambas consecuencias se demostraron a través de un mismo ejemplo, lo que indudablemente no asegura su generalidad.

Trataremos aquí de dar un enunciado preciso a dicho *nuevo teorema* y demostrar su generalidad.

No será superfluo insistir sobre algunos conceptos preliminares que han traído a nuestro juicio confusiones sobre el principio de los trabajos virtuales, y que en ciertos aspectos pretendimos, por lo menos en su faz didáctica, esclarecer en la publicación mencionada más arriba.

No consideraremos correcta más que una sola denominación para este principio, tal es la de *principio de los trabajos virtuales*: no es un teorema o consecuencia obtenida con el puro mecanismo de

de la lógica, sobre la base de otros principios de la Mecánica tiene, por el contrario, las propias características de un principio, porque resume hechos intuitivos y se justifica por sus consecuencias comprobables físicamente; no es correcto denominarlo *principio de los desplazamientos virtuales* como se lo hace muchas veces, porque no se trata de una ley que se deriva sólo de la condición impuesta a un sistema material cualquiera, de que su estado de desplazamiento sea virtual, sino que este estado puede aún ser real o efectivo, como ocurre en algunas circunstancias en los sistemas materiales estáticos o hiperestáticos en que los desplazamientos *virtuales* coinciden con los *posibles* (1); en efecto, en el conocido Manual Hutte, tomo III, página 26, edición española de 1940, se lo llama « Principio de los desplazamientos virtuales », e inmediatamente se lo aplica a los sistemas recticulados para determinar desplazamientos efectivos, tomando para ello el estado de desplazamiento real y un sistema de fuerzas exteriores e interiores ideal, lo que más bien induciría allí a llamarlo principio de las fuerzas virtuales. Tampoco consideramos correcto denominarlo « principio de las velocidades virtuales », porque los desplazamientos virtuales son atemporales (2) y, en consecuencia, su relación con un lapso infinitésimo es cuestión circunstancial y no esencial.

El principio debe denominarse *de los trabajos virtuales*, porque lo fundamental es la expresión de trabajo virtual que involucra:

a) la definición del desplazamiento virtual;

b) la intervención de fuerzas (interiores y exteriores) reales o hipotéticas, pero siempre vectorialmente constantes al efectuar el trabajo;

c) la independencia entre el estado de desplazamiento y el sistema de fuerzas actuantes, y

d) el producto escalar, de los antedichos vectores, correspondientemente.

Sobre la base de estos conceptos, la enunciación más correcta se estimó la siguiente:

La condición necesaria y suficiente, para que un sistema material esté en equilibrio en una configuración dada, siempre puede ex-

(1) P. Longhini. — « Lecciones de Mecánica Racional » (3° edición), pág. 447.
(2) Ver publicación citada, pág. 447.

presarse imponiendo que sea nula la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas exteriores (activas y reactivas) *e interiores.*

2. — Previa a las consideraciones que nos proponemos desarrollar sobre el mencionado *nuevo teorema*, debe hacerse notar que en las determinaciones que se hagan en lo que sigue no se tendrán en cuenta las tensiones internas y reacciones externas que se produzcan por variaciones de temperatura o por efecto del fragüe de las mezclas de hormigones, sino las producidas por otros sistemas de fuerzas.

Analicemos separadamente los tres problemas siguientes de los sistemas materiales en equilibrio:

a) determinación de reacciones de vínculos externos;
b) determinación de reacciones de vínculos internos;
c) determinación de desplazamientos reales.

En los problemas *a*) y *b*) las reacciones de vínculo se calculan del modo siguiente: se suprime el vínculo y se coloca en su reemplazo la fuerza reactiva o el sistema de tensiones —incógnitas— correspondiente; en los casos en que el vículo restringe en más de un grado la libertad del sistema, se lo descompone en vínculos que restrinjan un solo grado y las reacciones de estos últimos resultan así ser componentes de la reacción del primero. Suprimido de este modo uno de estos vínculos el sistema material resulta con un grado más de libertad.

3. — Consideremos ahora el caso *a*), y para ello tomemos una viga continua de tres tramos con cargas cualesquiera, donde se trata de determinar las reacciones en A_2 y A_3, que se indican en la figura 1.

En esta figura se ha trazado: en I, la elástica vertical para el estado real de cargas y, en II una elástica vertical virtual obtenida aplicando a la viga apoyada en A_1 y A_4, es decir, suprimidos los apoyos A_2 y A_3, las fuerzas F_1 en R_1 y F_2 en R_2.

La ecuación que resulta de la aplicación del principio de los trabajos virtuales en su forma más general, para la elástica virtual II y el estado real de cargas, es

$$\sum_i P_{ri}\,\delta''_{vi} + W_2\,\delta''_{v2} + W_3\,\delta''_{v3} + \mathcal{T}''_{iv} = 0 \qquad [1]$$

donde P_{ri} son las cargas reales, W_i las reacciones reales, δ''_{vi} los desplazamientos virtuales correspondientes, y $\mathcal{T}''_{iv}$ el trabajo virtual interno calculado con los esfuerzos reales y la deformación virtual.

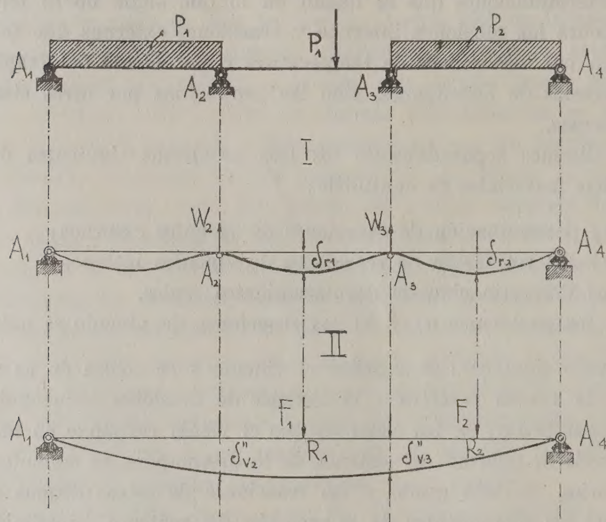


FIG. 1.

Si se aplica a los dos estados de carga I y II la ley de Betti (1), se obtiene

$$\sum_i P_{ri}\,\delta''_{vi} + W_2\,\delta''_{v2} + W_3\,\delta''_{v3} = F_1\,\delta_{r1} + F_2\,\delta_{r2} \qquad [2]$$

(1) La ley de Betti puede ser considerada como consecuencia del principio de los trabajos virtuales; no obstante no debe perderse de vista que, en su alcance conceptual, en la ley de Betti intervienen estados de desplazamientos posibles y en el principio de los trabajos virtuales deben considerarse en su forma general estados de desplazamiento virtual, pero esta distinción carece aquí de importancia porque en los estudios de sistemas estáticos o hiperestáticos, sea en su sustentación o en sus vínculos internos, esos dos estados de desplazamientos coinciden.

También debe decirse que la aplicación simultánea del principio de los trabajos virtuales y de la ley de Betti que puede ser su consecuencia, no debe tacharse de incorrecta, pues aquí vamos buscando establecer condiciones convenientes para la aplicación de dicho principio en su forma más general.

donde δ_{ri} son los desplazamientos reales de los puntos de aplicación de las F_i.

Comparando las ecuaciones [1] y [2] resulta

$$-\mathcal{T}''_{iv} = F_1 \delta_{r1} + F_2 \delta_{r2} \quad [3]$$

De donde, para que $\mathcal{T}''_{iv} = 0$, es menester que

$$F_1 \delta_{r1} + F_2 \delta_{r2} = 0 \quad [4]$$

Para ello, no pudiendo ser simultáneamente $F_1 = F_2 = 0$ porque no tendríamos en tales circunstancias desplazamientos virtuales, deben ocurrir algunos de los casos siguientes:

I) Si

$$F_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad F_2 \neq 0,$$

la [4] se anula para $\delta_{r1} = \delta_{r2} = 0$, condición que se cumple aplicando dichas fuerzas en los puntos A_2 y A_3

II) Si

$$F_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad F_2 = 0$$

o bien

$$F_1 = 0 \quad \text{y} \quad F_2 \neq 0$$

para la anulación de la [4] se requieren condiciones análogas al caso I).

III) Si

$$F_1 \neq 0 \quad \text{y} \quad F_2 \neq 0$$

$$\delta_{r1} \neq 0 \quad \text{y} \quad \delta_{r2} \neq 0$$

las condiciones [4] exigen que

$$F_1 \delta_{r1} = -F_2 \delta_{r2} \quad [5]$$

pero ésta importa el conocimiento de los desplazamientos reales de uno o más puntos, cosa que precisamente se ignora, salvo en los casos I) ó II).

Luego: *para que se anule el trabajo virtual interno es menester que el estado de desplazamiento virtual sea producido por un sistema constituído por fuerzas aplicadas en puntos que queden fijos en el estado de deformación real.*

No tiene objeto para nuestro propósito continuar el cálculo de las reacciones W_2 y W_3 que, como es sabido, se realiza formando dos ecuaciones tales como la [1], cada una con desplazamientos virtuales que anulen el trabajo virtual interno.

4. — Consideremos ahora un problema del caso *b*), de determinación de reacciones de vínculos internos, para ello tomemos el sistema material tratado en el nº 3, en el que nos proponemos calcular, por ejemplo, el momento flector en el punto E_1 (cualquiera) del tramo central.

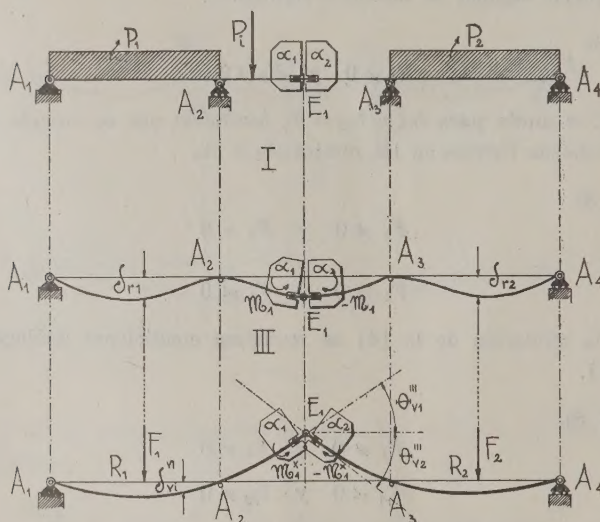


Fig. 2.

Para ello, en este punto pondremos una articulación auxiliar y en cada uno de los elementos de la viga que concurre a la articulación colocaremos sendas chapas solidarias. En el estado real de cargas, en estas chapas α_1 y α_2 actúan pares de momento $\mathcal{M}_1$; y $-\mathcal{M}_1$ vectorialmente opuestos, tales que el ángulo relativo de giro formado, por las mismas, es igual a cero (fig. 2 - I).

Sea I la elástica vertical real de deformación y III la elástica vertical virtual de deformación producida aplicando el sistema de

fuerzas F_1 en R_1 y F_2 en R_2 y, tal que ha hecho girar la chapa α_1, de un ángulo θ_{v1}''', y α_2 de un ángulo θ_{2v}'''.

La ecuación resultante de aplicar el principio de los trabajos virtuales en su forma general es:

$$\sum_i P_{ri}\,\delta_{vi}''' + \mathcal{M}_1\,\theta_{iv}''' - \mathcal{M}_1\,\theta_{2v}''' + \mathcal{T}_{ir}''' = 0 \qquad [1]$$

Donde, como se ha dicho, $\mathcal{M}_1$ es el momento de uno de los pares opuestos e igual al momento flector real en E_1 y $\mathcal{T}_{iv}'''$ el trabajo virtual interno.

Aplicando la ley de Betti a los dos estados de carga I y III, y teniendo en cuenta que los pares de momento $\mathcal{M}_1$ y $-\mathcal{M}_1$ son de fuerzas exteriores para la viga con articulación en E_1, resulta

$$\sum_i P_{ri}\,\delta_{vi}''' + \mathcal{M}_1\,\theta_{iv}''' - \mathcal{M}_1\,\theta_{2v}''' = F_1\,\delta_{r1} + F_2\,\delta_{r2} \qquad [2]$$

Igualando las ecuaciones [1] y [2], resulta

$$-\,\mathcal{T}_{iv}''' = F_1\,\delta_{r1} + F_2\,\delta_{r2} \qquad [3]$$

en la que, para que $\mathcal{T}_{iv}''' = 0$, es menester que el segundo miembro sea igual a cero; y para que esto ocurra, no pudiendo anularse las F_1 y F_2 deben ser nulos los desplazamientos reales δ_{r1} y δ_{r2}, pero en este caso estos se anulan sólo cuando las fuerzas se aplican en los puntos A_1, A_2, A_3 y A_4, en cuya circunstancia la elástica vertical virtual no da desplazamiento alguno.

Para obtener un estado de desplazamiento virtual, para el cual se anule el término $\mathcal{T}_{iv}$, podrá aplicarse un sistema de fuerzas equivalente a cero constituído por dos pares opuestos, por ejemplo, de momentos $\mathcal{M}^*$ y $-\mathcal{M}^*$, en cuya circunstancia el trabajo virtual interno es

$$-\,\mathcal{T}_{iv}''' = \mathcal{M}^*\,\theta_{r1} - \mathcal{M}^*\,\theta_{r2} = \mathcal{M}^*\,(\theta_{r1} - \theta_{r2})$$

que se anula en virtud de que el ángulo formado por las dos chapas α_1 y α_2

$$\theta_{r1} - \theta_{r2}$$

en el estado de desplazamiento reales es igual a cero; en consecuencia: para que el segundo miembro de la [2], o de la [3] se anule, es decir, *para que sea cero el trabajo virtual interno, es menester que el estado de desplazamiento virtual sea producido por pares vectorialmente opuestos actuando en sendas chapas* α_1 *y* α_2.

Como en el nº 3, carece de objeto, después de lo expuesto, para nuestro propósito, detallar el cálculo del momento flector en E_1.

5. — Para la determinación del esfuerzo de corte en el punto E_1 de la viga que venimos considerando, es menester proceder en forma análoga a la seguida en el nº 4, introduciendo en este punto un vínculo auxiliar, tal como el indicado en la figura 3, que permite

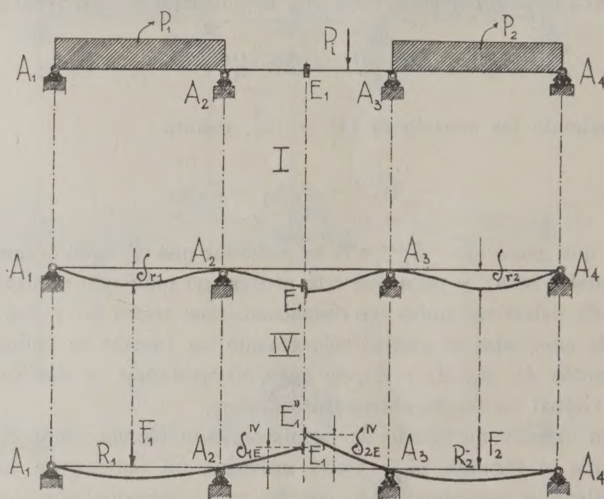


Fig. 3.

al punto E_1 desplazarse verticalmente en forma independiente según se lo considere como de la porción de viga que queda a la izquierda o de la que queda a la derecha, mecanismo que puede obtenerse con un paralelogramo articulado o por una corredera.

Sea, como antes, I la elástica vertical real de deformación y IV la elástica vertical virtual de deformación producida aplicando el sistema de fuerzas F_1 en R_1 y F_2 en R_2, y tal que en el punto E_1

hayan producido los desplazamientos δ_{1E}^{IV} y δ_{2E}^{IV}, mientras que en el estado real los desplazamientos de ambos extremos E_1 deben ser iguales.

El principio de los trabajos virtuales en su forma general, permite escribir la ecuación

$$\sum_i P_{ri}\, \delta_{vi}^{IV} + Q_1\, \delta_{1E}^{IV} - Q_1\, \delta_{2E}^{IV} + \mathcal{T}_{iv}^{IV} = 0 \qquad [1]$$

donde Q_1 y $-Q_1$ dan el esfuerzo de corte, esto es, el sistema de fuerzas interiores opuestas que se desarrolla en la viga real en el punto E_1 y $\mathcal{T}_{iv}^{IV}$ el trabajo virtual interno.

Aplicando la ley de Betti a los dos estados de carga I y IV, y teniendo en cuenta que las Q_1 y $-Q_1$ son las fuerzas exteriores opuestas que actuando en E_1 (E_1' y E_1'') mantienen los extremos de las dos porciones de viga con un desplazamiento real relativo nulo, o sea $\delta_{1E} = \delta_{2E}$, resulta

$$\sum_i P_{ri}\, \delta_{vi}^{IV} + Q_1\, \delta_{1E}^{IV} - Q_1\, \delta_{2E}^{IV} = F_1\, \delta_{r1} + F_2\, \delta_{r2} \qquad [2]$$

Igualando las [1] y [2], se obtiene

$$- \mathcal{T}_{iv}^{IV} = F_1\, \delta_{r1} + F_2\, \delta_{r2} \qquad [3]$$

expresión en la que para tener $\mathcal{T}_{iv}^{IV} = 0$, se requiere que

$$F_1\, \delta_{r1} = - F_2\, \delta_{r2}$$

que se cumple cuando en el mismo punto E_1 (E_1' y E_1'') donde los desplazamientos reales son $\delta_{r1} = \delta_{r2}$, se aplican dos fuerzas opuestas $F_1 = - F_2$.

Por lo expuesto, *para que se anule el trabajo virtual interno es menester que el estado de desplazamiento virtual sea producido por fuerzas vectorialmente opuestas actuando en la dirección de la corredera (vínculo auxiliar) en sendos puntos E_1' y E_1'', extremos de las porciones de viga* (punto E_1 de la viga).

Por análogas razones a las expresadas al fin de los nos. 3 y 4, no continuaremos el cálculo del esfuerzo de corte.

6. Enunciado del nuevo teorema. — En los problemas *a*) y *b*) las reacciones de vínculo — externo o interno — estático o hiperes-

tático de un sistema material cualquiera, cuando los estados de desplazamientos virtuales coinciden en los estados de desplazamientos posibles, y como se ha visto, se calculan por medio del principio de los trabajos virtuales en su forma más simple, siempre que sea posible la anulación del trabajo virtual interno, y procediendo del siguiente modo: se suprime el vínculo y en su reemplazo se coloca la fuerza reactiva, o el sistema de fuerzas interiores incógnitos correspondientes. En los casos en que tal vínculo restringe en más de un grado de libertad del sistema, se lo descompone en vínculos elementales que restrinjan un solo grado y de modo que las reacciones de estos últimos resulten así ser componentes de la reacción del primero. Suprimido así uno de estos vínculos elementales, el sistema material al quedar con un grado más de libertad es el que se utiliza para producir el estado de desplazamiento virtual.

Ahora bien, generalizando lo tratado en los números anteriores resulta que cualquiera sea el sistema material considerado, en las condiciones arriba expresadas, se pueden establecer las dos ecuaciones siguientes, la primera como aplicación del principio de los trabajos virtuales en su forma más general, la segunda como aplicación de su consecuencia, la ley de Betti:

$$\mathcal{T}_{va} + \mathcal{T}_{vr} + \mathcal{T}_{vi} = 0 \qquad [1]$$

donde los tres términos son los trabajos virtuales de las fuerzas activas, reactivas e interiores, respectivamente;

$$\mathcal{T}_{va} + \mathcal{T}_{vr} = \mathcal{T}_{12} \qquad [2]$$

donde el segundo miembro es el trabajo calculado con las fuerzas empleadas en producir el estado de desplazamiento virtual, y los respectivos desplazamientos que le corresponden en la deformación real.

De las [1] y [2], resulta que

$$-\mathcal{T}_{vi} = \mathcal{T}_{12} \qquad [3]$$

que implica establecer que el trabajo virtual interno sólo se anula cuando también se anula el término $\mathcal{T}_{12}$ que es lo que expresa el *nuevo teorema*, es decir: *para que el trabajo virtual de las fuerzas interiores sea igual a cero, se requiere que el desplazamiento virtual*

se haya obtenido con un sistema de fuerzas tales que el trabajo de estas calculado con el respectivo desplazamiento real sea nulo.

Repetimos, esta última es la condición que debe cumplirse para que la aplicación del principio de los trabajos virtuales en su forma general permita, de la manera más sencilla, la solución de algunos casos de los problemas *a*) y *b*) enunciados más arriba, consecuencia que se dió bajo el título de *nuevo teorema*, en la publicación antes mencionada del nº 579 de la revista « Ciencia y Técnica ».

Si se trata del cálculo de reacciones de vínculos externos, en puntos que en el sistema material real permanecen inmóviles, el trabajo virtual interno es nulo cuando el estado de desplazamiento virtual se obtiene aplicando fuerzas en la dirección de la reacción de los vínculos suprimidos, y cuando se trata del cálculo de esfuerzos interiores, el trabajo virtual interno es nulo cuando el estado de desplazamiento virtual se obtiene aplicando sistemas de fuerzas equivalentes a cero, en condiciones tales que con el estado de desplazamiento real den un trabajo nulo.

7. — Para mejor esclarecimento del antedicho *nuevo teorema*, presentaremos dos casos más, uno relativo el cálculo de una reacción de vínculo externo, otro de determinación de esfuerzos interiores, de sistema materiales en equilibrio en que no es posible anular el trabajo virtual de las fuerzas interiores y que, en consecuencia, la solución del problema no puede buscarse por el principio de los trabajos virtuales, en su forma general, mientras que se alcanza simplemente por aplicación de la ley de Betty.

a) Consideremos una viga continua con tres apoyos elásticos A_1, A_2 y A_3 (fig. 4) sometida a cargas verticales cualesquiera.

Sean λ_1, λ_2, λ_3, las respectivas constantes de los resortes en los puntos de apoyo A_1, A_2 y A_3; P_1, P_2 y P_3 el sistema de fuerzas reales activas; W_1, W_2 y W_3 las fuerzas reactivas exteriores reales que se desea calcular; la gráfica indicada con I representa la línea elástica vertical obtenida para el estado real de solicitación; la III, la línea elástica vertical virtual que corresponde a una fuerza activa F_1 arbitraria aplicada en un punto R_1.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales en su forma general entre las solicitaciones reales y dichos desplazamientos vir-

tuales, se obtiene

$$\sum_i P_i \delta_i''' + W_1 \delta_1''' + W_2 \delta_2''' + W_3 \delta_3''' + \mathcal{T}_{iv}''' = 0 \qquad [1]$$

donde $\mathcal{T}_{iv}'''$ es el trabajo virtual interno.

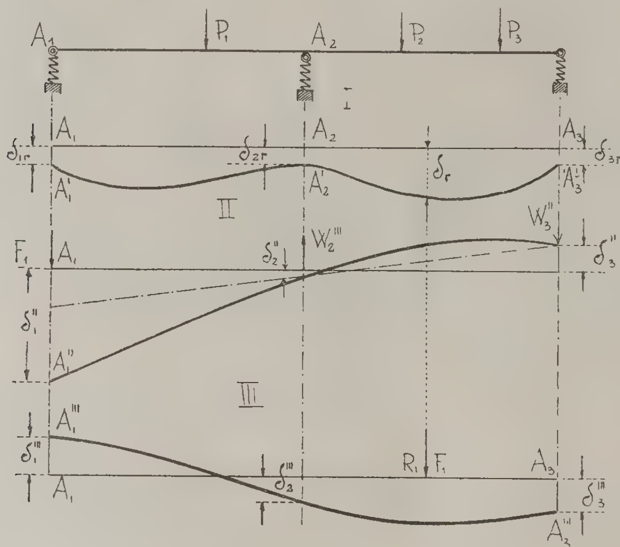


Fig. 4.

Si aplicáramos la ley de Betti, lo que como en los casos anteriores es lícito hacerlo, se obtiene

$$\sum_i P_i \delta_i''' + W_1 \delta_1''' + W_2 \delta_2''' + W_3 \delta_3''' = F_1 \delta_r + $$
$$+ W_1''' \delta_{1r} + W_2''' \delta_{2r} + W_3''' \delta_{3r} \qquad [2]$$

Donde W_i''' son sendas reacciones cuando actúa la fuerza virtual F_1 y δ_{ir} los desplazamientos reales de los puntos A_1, A_2 y A_3.

Comparando la [1] y [2], resulta

$$- \mathcal{T}_{iv}''' = F_1 \delta_r + W_1''' \delta_{1r} + W_2''' \delta_{2r} + W_3''' \delta_{3r} \qquad [3]$$

De la [3] se colige que en ningún caso $-\mathcal{T}_{iv}''' = 0$ porque para poder trazar una elástica virtual es menester que $F_1 \neq 0$ y, además,

los desplazamientos δ_{ir} reales no se anulan en ningún punto conocido de antemano.

Un desplazamiento virtual conveniente para el cálculo del segundo miembro de la [2] o la [3], evidentemente se obtiene cuando la F_1 se aplica en alguno de los puntos A_1, A_2 ó A_3, suprimiendo correspondientemente el vínculo que existe en dicho punto de aplicación de F_1, porque el valor de δ_r es fácilmente calculable por medio de la respectiva constante del resorte y, además, porque la elástica vertical virtual es de fácil trazado.

En la figura 4-II, se ha trazado la elástica vertical virtual aplicando F_1 en A_1; en tal caso

$$\delta_{1r} = \frac{W_1}{\lambda_1} \text{ y } W_2''' \text{ y } W_3'''$$

son directamente calculables, porque el sistema ahora es estáticamente determinado en su sustentación, calculables, por ejemplo, por las ecuaciones universales de la estática.

Aplicando la ley de Betti, entre las elásticas I y II, se tiene

$$\sum_i P_i \delta_i'' + W_1 \delta_1'' + W_2 \delta_2'' + W_3 \delta_2'' = F_1 \frac{W_1}{\lambda_1} + $$

$$+ W_2''' \frac{W_2}{\lambda_2} + W_3''' \frac{W_3}{\lambda_3} \qquad [4]$$

Esta ecuación (escalar) y las dos universales (vectoriales) siguientes:

$$\sum_i \overline{P_i} + \overline{W_1} + \overline{W_2} + \overline{W_3} = 0 \qquad [5]$$

$$\sum P_i \wedge (O - R_i) + \overline{W_1} \wedge (O - A_1) + \overline{W_2} \wedge (O - A_2) +$$

$$+ \overline{W_3} \wedge (O - A_3) = 0 \qquad [6]$$

siendo O un centro arbitrario de momentos, nos dan las ecuaciones escalares de primer grado necesarias y suficientes para determinar las tres incógnitas vectoriales W_1, W_2 y W_3.

En conclusión, resulta que este problema no se ha resuelto con el principio de los trabajos virtuales en su forma general, por la imposibilidad de anular el término $\mathcal{T}_{ir}'''$ de la [1], razón por la cual su solución se obtuvo por la ley de Betti.

8. — Consideremos, ahora, la estructura hiperestática estáticamente sustentada indicada en la figura 5, con fuerzas activas verticales, en la que nos proponemos calcular el esfuerzo del tornapunta 3-4.

Para ello, suprimimos dicho vínculo y colocamos en reemplazo sus reacciones, que

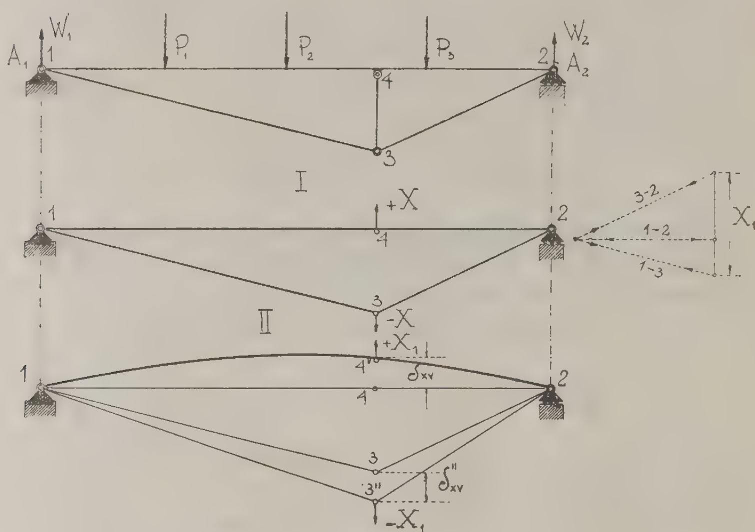


Fig. 5.

designaremos con $+X$ actuando en 4 y $-X$ actuando en 3.

Un estado de desplazamiento virtual se obtiene aplicando al sistema en 4 y 3 dos fuerzas opuestas tales como $+X_1$ y $-X_1$; la primera producirá una flexión del cordón 1 - 2 cuya elástica vertical será fácil trazar, la que permitirá calcular el desplazamiento virtual δ'_{xv} del punto 4′, mientras que con la segunda, previa la determinación de los esfuerzos internos que produce en los elementos 1 - 2, 1 - 3 y 2 - 3, se calculará el desplazamiento vertical δ''_{xv} del nudo 3.

Aplicando el principio de los trabajos virtuales en su forma general, teniendo en cuenta: que P_i son las fuerzas reales activas; que X y $-X$ funcionan como fuerzas activas; que δ'_{xv} y δ''_{xv} son los

desplàzamientos virtuales (fig. 5 - II) de los puntos 3 y 4, respectivamente, y $\mathcal{T}_{ix}$ el trabajo virtual interno, se escribirá:

$$\sum_i P_i \delta_{iv} + X (\delta'_{xv} + \delta''_{xv}) + \mathcal{T}_{iv} = 0 \qquad [1]$$

Si se aplica la ley de Betti, se obtiene

$$\sum_i P_i \delta_{iv} + X (\delta'_{xv} + \delta''_{xv}) = X_1 \delta_r \qquad [2]$$

Donde δ_r es el desplazamiento real relativo entre los nudos 3 y 4, esto es, el acortamiento o alargamiento real del tornapunta, que vale

$$\delta_r = \frac{X l}{E \Omega} \qquad [3]$$

donde l es su largo, E el coeficiente de elasticidad y Ω su sección.

Comparando las [1], [2] y [3], se tiene

$$- \mathcal{T}_{iv} = X_1 \delta_r = X_1 \frac{X l}{E \Omega} \qquad [4]$$

Expresión que no se anula, en ningún caso, por cuanto si $X_1 = 0$ no hay estado de desplazamiento virtual, y δ_r tampoco se anula en ningún caso.

Las ecuaciones [2] y [3] dan la solución del problema propuesto, pero, como se advierte, no se ha aplicado el principio de los trabajos virtuales en su forma general, sino la ley de Betti, por la imposibilidad de anular el trabajo virtual interno en la expresión [1], que es lo que ocurría en el problema tratado en el nº 7.

9. — Consideremos ahora el problema *c*), de determinación de desplazamientos reales en un sistema material cualquiera. Para ello consideremos

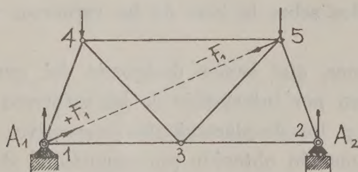


FIG. 6.

NOTICIARIO

Renuncia del vicepresidente 1° de la Sociedad Científica Argentina, doctor Eduardo Braun Menéndez. — Por motivos de índole particular presentó su renuncia al cargo que ocupaba en la Junta Directiva el doctor Eduardo Braun Menéndez, y ha insistido en mantener su dimisión no obstante las gestiones que el presidente, doctor Sánchez Díaz, comisionado al efecto por la Junta, realizó en procura de que modificara su decisión.

Se ha aceptado, pues, esta renuncia, que indudablemente será muy lamentada por los socios de la institución en razón de la jerarquía científica y del don de simpatía del dimitente.

La Junta Directiva resolvió enviar una nota al doctor Braun Menéndez agradeciéndole la cooperación prestada y haciéndole presente el sentimiento con que ve su alejamiento .

Donación a la Biblioteca. — Miembros de la familia del ingeniero Enrique Marcó del Pont, fallecido recientemente, han hecho donación de diversas obras con destino a la Biblioteca. Se ha aceptado la donación y se ha agradecido a los donantes su generosa disposición.

Donaciones para la publicación de ''Anales''. — Se han recibido las siguientes donaciones:

Siam Di Tella Ltda.	$ 3.000.—
Ing. Alberto Bilotti	$ 1.000.—
Sr. Víctor R. Palmeri	$ 1.000.—
Dr. Angel Bo	$ 500.—
Total	$ 5.500.—

Nuestros consocios apreciarán cabalmente estos gestos.

Vinculación científica hispanoargentina. — La Comisión Hispanoargentina de Relaciones Científicas — a cuyas actividades ya nos referimos en el número de estos ''Anales'' de agosto último — ha proseguido sus tareas tendientes a estrechar la vinculación en los dominios de la ciencia y de la técnica, no sólo entre las instituciones que en España y aquí se dedican a tales especulaciones sino también aproximando a los investigadores que en ambos países consagran su labor a estudios de esa índole, canjeando sus trabajos o manteniendo correspondencia directa y trato personal.

En la reunión plenaria realizada en la Sociedad Científica Argentina el 20/10/52 por la comisión de la sección Buenos Aires, el presidente de la Institución Cultural Española, Dr. Rafael Vehils, presentó un documentado informe sobre la encuesta referente al intercambio de publicaciones en las ramas de las ciencias exactas, físicoquímicas y naturales, medicina y organizaciones de técnica industrial. Sobre 154 entidades consultadas, la encuesta registra 112 respuestas concretas, de las que 73 corresponden a Buenos Aires y las 39 restantes —que representan el 53,4 % — pertenecen a instituciones oficiales o sociedades del interior del país (Córdoba, Tucumán, Eva Perón, Rosario, Mendoza, Santa Fe y algunas otras ciudades), pues se ha deseado lograr cifras estadísticas que prácticamente alcancen a todos los centros de estudio de la República; se ha verificado así que ciertas bibliotecas reciben nutrida serie de publicaciones españolas, pero el número de éstas es muy reducido en varias de aquéllas y faltan totalmente en una buena proporción — casi cincuenta por ciento — de las entidades consultadas.

Al aprobar el informe de referencia la Comisión ha enviado a la sección de Madrid toda la documentación reunida y una serie de 213 publicaciones argentinas (revistas, boletines, memorias y monografías) para ordenar y reactivar la reciprocidad de tal servicio de información en las especialidades de la ciencia y de la técnica, agregando algunas consideraciones que definen claramente el alcance y propósitos que tal intercambio científico persigue.